MÉTHODES D'APPROXIMATION

1 Généralités

On cherche une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ (ou $f(x) = x$) où f est une fonction continue, voire plusieurs fois dérivable sur un intervalle I. On suppose de plus qu'il y a au moins une solution de l'équation sur l'intervalle I.
Quel théorème nous permet d'affirmer qu'il existe une solution de l'équation $f(x) = 0$ lorsque qu'il existe a et b dans I tels que $f(a)f(b) \leq 0$?
Pour chacune des méthodes suivantes nous allons construire une suite récurrente (x_n) qui se rapproche d'une solution, et nous arrêterons le calcul de la suite lorsque nous serons proche de la solution à une erreur ϵ près donnée. On peut dire que x_n est une valeur approchée à ϵ près d'une solution de $f(x) = 0$ si $f(x_n)f(x_n + \epsilon) \leq 0$ ou si $f(x_n - \epsilon)f(x_n) \leq 0$.

Exercice 1 *Écrire une procédure nommée APPROCHE qui prend en argument une fonction continue, un réel x_n et une marge d'erreur ϵ et qui renvoie true si x_n est une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ à ϵ près, et $false$ dans les autres cas. Tester la procédure sur un ou deux exemples.* **if, or**

Pour visualiser la rapidité de convergence de la suite, on se sert de la procédure DESSIN suivante :

```
> with(plots):
> with(plottools):
> DESSIN:=proc(f,x,n)
> local i,t,l,courbe,a,b:
> a:=min(seq(x[i],i=0..n))-0.1:b:=max(seq(x[i],i=0..n))+0.1:
> for i from 0 to n do
> t[i]:=textplot([x[i],0.05,"x".i],align=ABOVE):
> l[i]:=line([x[i],0],[x[i],f(x[i])],linestyle=2);
> od:
> courbe:=plot(f(t),t=a..b):
> display([courbe,seq(t[i],i=0..n),seq(l[i],i=0..n)]);
> end;
```

Cette procédure prend comme arguments la fonction, un tableau de valeurs représentant la suite et le rang jusqu'auquel on veut aller, par exemple si n vaut 3, x_0, x_1, x_2 et x_3 seront représentés sur le dessin.

2 Crible

La méthode la plus simple consiste à cribler l'intervalle I par des espacements de plus en plus petits. *pasinit* représente le pas initial servant à cribler. Sitôt que l'on a trouvé des valeurs de signes opposés par la fonction f, on fait demi-tour et on réduit le pas en le multipliant par un $facteur$ contractant, compris strictement entre 0 et 1. *depart* représente la valeur $x[0]$ et e l'erreur maximum recherchée.

```
Digits:=100:
> CRIBLE := proc(f,depart,e,pasinit,facteur)
> local x,i,pas:
> x[0]:=depart:pas:=pasinit:i:=0:
> while(not(APPROCHE(f,x[i],e)) and i<1000) do
> x[i+1]:=evalf(x[i]+pas):
> if (f(x[i+1])*f(x[i])<=0) then pas:=-pas*facteur fi;
> i:=i+1;
> od:
> printf("%d itérations, valeur trouvée : %.40f",i,x[i]);DESSIN(f,x,min(i,9));
> end;
```

Tester la procédure avec $f(x) = x - cos(x)$, $x_0 = 0,2$ et $pas = 1$ (choisir le facteur). Que penser de la rapidité de convergence ?

3 Dichotomie

La méthode dichotomique ressemble à la précédente, mais au lieu de construire une suite, on construit deux suites représentant les extrémités d'un segment contenant un zéro de f, f prenant des valeurs de signes opposés aux extrémités. On remplace à chaque fois une des extrémités (celle dont l'image par f est de même signe que l'image du milieu) par le milieu du segment.

Exercice 2 *Adapter la méthode précédente pour fabriquer la procédure DICHOTOMIE prenant comme arguments f, a, b (extrémités initiales) et la marge d'erreur maximum souhaitée e.*

4 Point fixe

Cette fois-ci l'objectif est de résoudre des équations de la forme $f(x) = x$. Pour cela, sous certaines conditions que l'on verra plus tard, on peut essayer de construire une suite récurrente à l'aide de la fonction f, en fixant x_0 dans I puis en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *(exercice mathématique) On suppose que f admet au moins un point fixe r dans I et que, de plus, f est dérivable sur I, et que sa dérivée vérifie :*

$$\exists k \in [0; 1[, \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$$

1. *Montrer que pour tout $(x, y) \in I^2$, $\quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$*
2. *En déduire que f admet un unique point fixe dans I.*
3. *Montrer que la suite définie par la donnée de $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie et vérifie :*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - r| \leq k^n |x_0 - r|$$

   En déduire qu'elle converge vers r.

Exercice 4 *Programmer la procédure CRIBLE, qui prend comme arguments la fonction f, la valeur de départ x_0 et la marge d'erreur maximum ϵ. Tester la procédure avec la fonction cosinus.*

5 Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est basée sur l'utilisation de la tangente en un point de la courbe d'une fonction f. Plus précisément, le choix d'une première valeur x_0 approchée d'un zéro réel à localiser détermine un premier point $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe qui sera considéré comme un premier point de tangence. Ce nombre est appelé amorce du procédé itératif de Newton-Raphson. L'abscisse du point d'intersection de la première tangente avec l'axe des x sera considéré comme une deuxième valeur x_1 approchée du zéro à localiser. À son tour, cette valeur permettra de considérer un deuxième point de tangence $(x_1, f(x_1))$. À nouveau, l'abscisse du point d'intersection de la deuxième tangente avec l'axe des x sera considéré comme une troisième valeur x_2 approchée du zéro. En poursuivant ce procédé itérativement, on obtiendra, sous certaines conditions, une séquence de différentes valeurs x_0, x_1 ,x_2, x_3 ,... qui vont se rapprocher de plus en plus d'un zéro réel de la fonction f.

Rappelons que l'équation d'une droite passant par un point (a, b) de pente m est donnée par

$$y = m(x - a) + b$$

Si la fonction f est une fonction dérivable en x_k, la pente de la tangente à la courbe passant par le point $(x_k, f(x_k))$ est directement donnée par $m = f'(x_k)$. Alors, l'équation de chaque tangente à la courbe d'équation passant par le point $(x_k, f(x_k))$ est donnée par

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$$

L'abscisse du point d'intersection de la k-ième tangente avec l'axe des x est évidemment la racine de l'équation $0 = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$. En résolvant, pour x, cette équation, on obtient

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Or, la valeur de x est précisément la prochaine approximation qui est pris en charge dans ce procédé itératif. On déduit donc que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Cette équation est appelée équation de récurrence de Newton-Raphson.

Exercice 5 *Adapter la méthode FIXE pour fabriquer la procédure NEWTON prenant comme arguments f, x_0 (amorce) et la marge d'erreur maximum souhaitée e. Rajouter dans la procédure DESSIN le tracé des tangentes. Tester la procédure avec la fonction $f(x) = x - cos(x)$ et observer ce qui se passe pour différentes valeurs de départ, en particulier pour $x_0 = 1$ et $x_0 = 4$.* **line**

Exercice 6 *Avec la procédure précédente, trouver des valeurs approchées à 10^{-30} près de la fonction $f(x) = 8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1$. Essayer de repérer la façon de choisir les amorces.*