TD N^o 3 TSI SOA 2007-2008

L'objectif de ce TD est d'approcher des nombres e, π, $\ln 2$, $\sqrt{2}$ par différentes méthodes, toutes au programme de la classe TSI.

I À l'aide d'approximations d'intégrales

I.1 Méthode des trapèzes

Écrire une procédure Trapeze qui prend comme argument une fonction f, deux réels a et b, un entier strictement positif n et qui renvoie l'approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ par la méthode des trapèzes, lorsque l'on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. On rappelle que l'approximation est :

$$\text{Trapeze}(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

I.2 Approximation de π

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et en déduire une valeur approchée de π utilisant la méthode des trapèzes. Que pensez-vous de la rapidité de convergence ?

I.3 Quadrature de l'hyperbole

On prend cette fois-ci $f : x \mapsto 1/x$. Justifier graphiquement que

$$\forall x \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^x f(t)\,dt \leq \text{Trapeze}(f, 1, x, n)$$

Tracer également le graphe de $g : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ pour en déduire :

$$\forall x \in]0; 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Trapeze}(g, 1, x, n) \leq \int_0^x g(t)\,dt$$

I.3.1 Approximation de $\ln 2$

1. Déduire des inégalités précédentes un encadrement de $\ln 2$
2. Écrire une procédure qui renvoie un encadrement de $\ln 2$ de diamètre donné $\epsilon > 0$. On pourra l'appeller Lndeux(ϵ)

I.3.2 Approximation de e

1. Écrire une procédure Quadra(f, a, p, m, M) qui calcule la somme des aires des trapèzes de base p (p comme pas), à partir de a, jusqu'à ce que la somme ne soit plus dans l'intervalle $[m, M]$. m et M doivent être tels que $m \leq 0 \leq M$. Cette procédure renvoie alors $x = a + kp$ où k est le numéro du dernier trapèze convenable. Autrement dit, k est le plus grand entier tel que :

$$m \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{2}\left(f(a + (i-1)p) + f(a + ip)\right) \leq M$$

   Et la procédure renvoie $x = a + kp$.
2. Calculer pour différentes valeurs de p, avec $|p|$ petit, Quadra($f, 1, p, -1, 1$).
3. Quelle autre valeur approchée obtient-on lorsque $p < 0$?

II Méthode du point fixe

II.1 Rappel théorique

Soit $f\colon I \to I$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle M un majorant de $|f'|$ sur I. On peut alors définir une suite récurrente par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que si (u_n) converge vers $l \in I$ alors $l = f(l)$ (on dit que l est un point fixe de f).
2. Montrer que si $l = \lim u_n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

   $$|u_n - l| \leq M^n |u_0 - l|$$

   En déduire que si $M < 1$ et $I = [a, b]$, on peut savoir à l'avance, en fonction de M, ϵ et $d = b-a$, le nombre de termes à calculer pour avoir une approximation de la limite à ϵ près. Écrire une procédure NombreTermes(M, ϵ, d) qui donne le nombre de termes à calculer.

II.2 Application : valeur approchée de $\sqrt{2}$

Prendre $f\colon x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 - 2) + x$, $I = [1; 2]$ et $u_0 = 1$.

1. Vérifier que I est stable par f
2. Donner un majorant de $|f'|$ sur I (on peut s'aider de Maple)
3. Quel est le seul point fixe de f ?
4. En supposant que la suite tend vers ce point fixe, combien de termes faut-il calculer pour avoir une approximation à 10^{-20} près ?
5. Écrire une procédure Rec(u_0, f, n) qui renvoie le terme u_n de la suite définie par récurrence à l'aide de u_0 et f.
6. Faire les calculs correspondants à l'approximation demandée.