TD N^o 4 TSI SOA 2007-2008

Dans ce TD on va rechercher des solutions approchées d'équations différentielles par différentes méthodes. En premier lieu, on va manipuler des fonctions de plusieurs variables et obtenir leurs dérivées partielles.

1. Fonction de plusieurs variables.
   (a) Définir la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
   $$f(x,y) = \frac{x^2}{4} - \cos(y)\sqrt{6-x^2}$$
   $\boxed{f := (x,y)->\ldots}$
   (b) Tracer la surface représentative de f (clic droit sur l'expression de $f(x,y)$, puis sélection de plot3D). On adaptera au mieux les intervalles pour x et y, en foncton de l'ensemble de définition de f, de ses périodicités et symétries.
   (c) Trouver à l'aide du dessin les (valeurs approchées des) extremums de la fonction, ainsi que leurs positions.
   (d) Donner les dérivées de f par rapport à chacune des variables. **D[i]**
   (e) Retrouver les extremums en cherchant les points critiques de f, c'est à dire les couples (x,y) pour lesquels les deux dérivées s'annulent. **solve**
2. Équation différentielle. On considère l'équation différentielle suivante :
   $$y' = f(x,y), \quad \text{avec} \quad f(x,y) = y^2 - x$$
   L'objectif est de trouver des solutions approchées de cette équation, et de les tracer. Dans un premier temps on considèrera une autre équation différentielle plus simple, dont on connait les solutions, afin de comparer la solution approchée avec la solution réelle.
   Toutes les méthodes qui suivent fonctionnent sur un principe commun. On se donne une valeur x initiale, par exemple $x_0 = 0$ et une valeur de $y(x_0)$, que l'on note y_0. Puis on se fixe un pas h, relativement petit, par exemple $h = 0,01$. On construit alors deux suites (x_n) et (y_n) (d'ailleurs éventuellement n est un entier relatif), avec $x_n = nh$ et (y_n) définie par la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = y_n + h\phi(x, y_n, h)$$
   où ϕ est une fonction de trois variables qui change suivant les méthodes.
   (a) Méthode d'Euler : $\phi(x,y,h) = f(x,y)$
   (b) Méthode d'Euler modifiée :
   $$\phi(x,y,h) = f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x,y))$$
   (c) Méthode de Henn :
   $$\phi(x,y,h) = \frac{1}{2}f(x,y) + \frac{1}{2}f(x+h, y+h*f(x,y))$$
   (d) Méthode de Runge Kutta :
   $$\phi(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$
   Votre travail consiste à définir les fonctions f et ϕ, puis définir une procédure qui prend en argument le pas ,la valeur maximum de x_n et la valeur de y_0 puis qui renvoie la liste de points $[[x_0,y_0][x_1,y_1]\ldots[x_n,y_n]]$. Attention, si vous prenez un pas trop petit l'affichage de ce tableau risque de bloquer MAPLE, aussi n'oubliez pas les " :" à la place du " ;". Enfin, il faut tracer sur un même graphique la solution et la liste de points obtenus. **while, seq, plot**