

TD N° 2 TSI SOA 2007-2008

On se propose dans ce TD de travailler sur l'épreuve du concours commun. Il y était décrit un algorithme de calcul du polynôme caractéristique à l'aide des traces.

1. Quelques rappels de fonctions de MAPLE.
 - La fonction **time()** renvoie le temps de calculs effectué depuis l'ouverture de MAPLE. Voici une utilisation : **deb :=time() :10000! :fin :=time() :fin-deb;**. Une autre façon d'utiliser la fonction est de mettre la commande en arguments. Par exemple **time(10000!)**
 - Pour utiliser des commandes d'algèbre linéaire, inclure la librairie : **with(linalg)** :
 - Pour définir une matrice : **matrix(2,2,[1,2,3,4])**, pour définir une matrice aléatoire : **randmatrix(7,7)** ;, pour définir une matrice diagonale : **diag(1,2,3,4)** ; ou bien **diag(seq(i,i=1..7))** ;
 - Pour calculer le déterminant d'une matrice : **det(A)** ; ou bien de façon non optimisée : **det(A,sparse)** ;
 - Pour calculer la trace d'une matrice : **trace(A)** ;
 - Pour calculer le nombre de colonnes d'une matrice : **rowdim(A)** ;
 - Pour multiplier deux matrices : **multiply(A,B)** ; ou bien **evalm(A&*B)** ;
 - Pour calculer le polynôme caractéristique : utiliser le déterminant, ou bien la fonction **charpoly(A)** ;
2. Retour au sujet du concours. Dans ce sujet on note :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \dots a_{n-1}x + a_n$$

le polynôme caractéristique d'une matrice A . C'est à dire que $P(x) = \det(A - xI)$. On rappelle qu'évidemment $a_0 = (-1)^n$. Les coefficients suivants sont alors calculés grâce à la relation de récurrence :

$$\forall k \in [1, n], \quad -ka_k = a_0 \text{tr}(A^k) + a_1 \text{tr}(A^{k-1}) + \dots a_{k-1} \text{tr}(A)$$

- (a) Fabriquer la matrice identité pour une dimension donnée N .
- (b) A l'aide de la matrice identité, calculer le polynôme caractéristique d'une matrice aléatoire $N \times N$. (avec sparse). Faire une boucle en affichant la durée des calculs pour des dimensions de plus en plus grandes. Jusqu'à quelle valeur est-ce raisonnable de calculer le polynôme caractéristique ?
- (c) Fabriquer une procédure qui prend en argument une dimension N , puis fabrique une matrice aléatoire, calcule et met en mémoire les traces des puissances de A jusqu'au rang N , et enfin calcule les coefficients du polynôme par la méthode des traces. Comparer la rapidité de l'algorithme avec le précédent.
- (d) Essayez-le programme avec les exemples donnés au concours.