TD de MAPLE N^o 2

1 Algorithmique

Un algorithme est un enchaînement fini d'instructions simples : des calculs, des affectations de variables et des tests suivis de branchements (c'est à dire que suivant le résultat du test, on va poursuivre l'algorithme à un endroit plutôt qu'un autre).

1.1 Suites d'instructions

Dans Maple, pour faire une suite d'instructions, il suffit les mettre les unes derrière les autres et terminer chaque instruction par "‘ :"’ ou " ;". Néanmoins Maple autorise parfois que l'on ne ponctue pas la dernière instruction (entre **do** et **od** par exemple). Si on veut appliquer une suite d'instructions à une variable x, on peut définir une fonction dans les cas simples
f := x-> inst1 ;
ou une procédure pour des algorithmes plus complexes, et notamment si ceux-ci utilisent des variables locales
f := proc (x) local y,z ; inst1 ;inst2 ;... end
Attention, lors de l'appel d'une procédure Maple commence par remplacer les arguments dans toute la suite d'instructions. Par exemple
f := proc(x) x :=x+1 end ;
renvoie une erreur lorsque l'on demande **f(2)**, mais pas lorsque l'on demande **f(y)**.

1.2 If

If <condition> then inst1 else inst2 fi ;

1.3 Boucle for

La syntaxe est la suivante :
for i from 1 to 30 do inst1 ;inst2 ;... od
Exercice 1: (suite de Syracuse) Écrire une fonction f qui à un entier p renvoie $3p+1$ si il est impair, et $p/2$ si p est pair (**odd, even**). Étant donné $a \in \mathbb{N}$, on peut alors définir une suite telle que $u_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = f(u_n)$. Écrire une procédure qui, étant donné a et n, donne la valeur de u_n. Vérifier la conjecture : pour tout a (essayer $a = 1234$), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n vaut 1, 2 ou 4.

1.4 Boucle While

while <condition> do inst1 ;... od
Tant que la condition est réalisée, on répète en boucle les instructions. Cette écriture est très pratique pour beaucoup de problèmes d'approximation sur les suites.

Exercice 2: Déterminer le premier entier N tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq 10$.

2 Fourier

Rappel : si $\vec{x}$ est un vecteur de l'espace, et si $(\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3})$ est une base orthogonale de l'espace, alors on peut facilement trouver les coordonnées (x_1, x_2, x_3) de $\vec{x}$ dans cette base, en remarquant que

$$\vec{x}.\vec{y_2} = (x_1\vec{y_1} + x_2\vec{y_2} + x_3\vec{y_3}).\vec{y_2} = x_2\|\vec{y_2}\|^2$$

donc $x_2 = \dfrac{\vec{x}.\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|^2}$. Et de même pour x_1 et x_3 bien sûr.
On applique la technique précédente pour un espace vectoriel de fonctions 2π périodique et continue par morceaux. Cet espace est muni du produit scalaire suivant :

$$f.g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

Exercice 3: Définir ce produit scalaire dans Maple (**int**). Définir la fonction norme à l'aide de ce produit scalaire (**sqrt**). Vérifier que les fonctions cosinus et sinus sont orthogonales, et trouver leur normes.

On considère la famille de vecteurs $(x \mapsto \cos nx)_{n\in\mathbb{N}}$ réunie avec la famille $(x \mapsto \sin nx)_{n\in\mathbb{N}^*}$
Exercice 4: Montrer, à l'aide de Maple que cette famille est orthogonale (**assume**). Donner également la norme de ces fonctions.

Exercice 5: Construire une fonction $f : x \mapsto a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{10}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$. En utilisant une boucle **for**, calculer le produit scalaire de f avec chacune des 15 premières fonctions $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$. Calculer également la norme de f. En déduire la formule suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(a_n^2 + b_n^2)$$

Exercice 6: On généralise le problème précédent. On écrit alors une procédure qui, à partir d'une fonction g, va :

- calculer ses coefficients de Fourier $a(n)$ et $b(n)$ qu'on écrira comme des fonctions
- calculer sa norme
- dessiner sur un même dessin la courbe de g et le début de la série de Fourier (par exemple la fonction f précédente)
- renvoyer l'égalité de Parseval, c'est à dire la généralisation de l'égalité précédente.

Tester votre procédure pour des fonctions simples, en particulier $g(x) = x$

3 Autre exercice

Mais aura-t-on vraiment le temps ?

Montrer que pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 on a :

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \alpha P\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) + \beta P\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)$$

où α et β sont à déterminer.